La thèse de Frédéric Pierret est consacrée à la modélisation de dynamiques, qu'elles soient déterministes, stochastiques ,en temps continu ou discret.Il s'agit donc d'un projet très ambitieux.
La première partie propose quelques rappels de calculs stochastiques, notamment les intégrales d'Itô et Stratonovich et leurs simulations numériques.
Le calcul "Time scale " est le sujet du second chapitre.Un auteur,S. Hilger y est mentionné comme fondamental, pour un travail de 1988, que je n'ai pas trouvé dans les références. Un calcul variationnel y est associé, produisant,par exemple, une version "faible" de Dubois-Reymond, Euler-Lagrange,etc). Cette approche unifie ainsi les analyses discrète et continue dans le paramètre temps.
Le corps de travail porte sur la modélisation de phénomènes aléatoires en physique et astronomie..Et cite Mumford pour sa conviction que le futur des sciences naturelles en dépend.

Le chapitre 3 illustre l'observation de Mumford par 4 problèmes stochastiques issus de la physique et l'astronomie.On y décrit, en particulier, une version stochastique du problème classique des 2 corps (Sharma-Parthasarathy), qui a déjà donné lieu à deux publications de l'auteur de cette thèse.
Il n'y a essentiellement que deux manière d'ajouter un bruit à un système classique Hamiltonien. Frédéric choisit la plus connue et utilisée par les physiciens :la perturbation stochastique ne porte que sur l'équation Hamiltonienne pour le moment. Le système mécanique complet est donc hypoelliptique. Le réference aux travaux de Bismut est alors inévitable.
Dans le cas du système de 2 corps considéré, la structure Hamiltonienne cherchée est absente.De plus, alors que le moment angulaire du système est une intégrale première, au sens faible défini par l'auteur (i.e en moyenne) l'énergie ne l'est pas.
Comme le fait observer Fréderic, un réel besoin d'interprétation théorique des systèmes Hamiltoniens stochastiques est suggéré par cet exemple. Notons le grand soin porté à la simulation numérique de ce système dynamique.
Un modèle aléatoire intéressant considéré par la suite est celui de la rotation terrestre.Il s'agit de définir les variations stochastiques admissibles à partir du modèle de mouvement d'un ellipsoide rigide.Des équations de Euler-Liouville stochastiques sont obtenues.
La troisième partie analyse les relations entre les structures discrètes et continues, c'est à dire entre les équations aux différences finies et les équations différentielles ordinaires.
La question de la discrétisation dans le temps réapparaît dans le chapitre 8 , avec le problèmes des dérivées à gauche et à droite. Elles sont instrumentales dans les calculs "forward" et "backward" de Itô, le second étant bien moins connu que le premier. C'est un peu regrettable car Itô avait présenté lui-même la version backward pour rendre compte de l'intégrale de Stratonovich.
Le chapitre 9 présente une notion de plongement discret.On en déduit une multiplicité de représentations discrètes d'équations différentielles ordinaires (en comparant avec les résultats de Hairer,Wanner et Lubich).Les plongements d'ordres plus élevés sont considérés par la suite.

Les Hamiltoniens discrets et le problème inverse du calcul de variations sont considérés dans les chapitres 11 et 12. Puis on applique les résultats obtenus pour les équations aux différences finies au cas de Newton, ainsi qu'à une version time-scale du Théorème classique de Noether.
La modélisation et la dynamique d'échelle sont examinées en adoptant le point de vue que la fonction d'Okamoto correspond à un phénomène physique réel.
Les modèles asymptotiques et équations d'échelle sont illustrés par les équations de chaleur et de Schroedinger.L'equation de diffusion peut ainsi s'interpréter comme celle de Newton sous un régime d'échelle particulier.
La dernière partie du travail est consacrée aux méthodes numériques associées à ce cadre théorique.Dans quelle mesure préservent t'elles les propriétés dynamiques qualitatives du problème initial ? En ce qui concerne les équations différentielles ordinaires, on considère des schémas numériques non habituels, où les dérivées (dites ici de "Nelson") apparaissent.Un schéma de Euler-Maruyama est considéré pour résoudre des équations différentielles stochastiques. Le terme "non-standard" est ,ici, un peu malheureux :il fait penser,à tort, à l'analyse non standard où, curieusement, à tout théorème classique correspond aussi une multiplicité de versions non standards.
L'auteur considère que son travail peut être une étape dans la formalisation mathématique du principe de "Relativité d'échelle de Nottale".
Il me parait clair que la thèse de Frédéric est un travail très sérieux, et ambitieux, qui remplit tous les critères pour mériter un doctorat. Le soin apporté aux méthodes numériques, et les questions qu'on y pose me paraissent particulièrement remarquables.Car il est tout à fait exact qu'en général,la stochastisation de systèmes Hasmiltoniens (par exemple) ruine toutes les propriétés qualitatives du système initial en question. L'idée d'étudier des discrétisation préservant autant que possible ces propriétés me parait donc très naturelle et intéressante.
Un problème analogue avait été rencontré par Feynman lors de son approche de la mécanique quantique par les "Intégrales de chemins".Les difficultés liées à la discrétisation en temps de trajectoires irrégulières y sont omniprésentes. Mais néanmoins interprétées comme modélisant des phénomène réels. Par exemple, l'existence de dérivées à gauche et à droite différentes pour les trajectoires quantiques y est présentée comme l'origine même du principe d'incertitude.En ce sens,certaines des idées présentées dans cette thèse méritent d'être confrontées à celles de Feynman, et développées . Et permettront sans doute de faire avancer la théorie générale , sans doute profonde, sur laquelle repose tous les phénomènes en question.

Date : 23/9/2015

Signature :